МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Южный федеральный университет»
Институт математики, механики и компьютерных наук им. И. И. Воровича

УТВЕРЖДАЮ
Директор Института математики, механики и компьютерных наук им. И. И. Воровича

_______________ Карякин М.И.
«__15__»______марта__________2016 г.

Программа вступительного экзамена в аспирантуру по специальной дисциплине

Направление подготовки
01.06.01 – «МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА»

Направленности
«Вещественный, комплексный и функциональный анализ»,
«Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление»,
«Математическая физика»,
«Механика деформируемого твердого тела»,
«Механика жидкости, газа и плазмы»

Уровень высшего образования
ВЫСШЕЕ ОБРАЗОВАНИЕ – ПОДГОТОВКА КАДРОВ ВЫСШЕЙ КВАЛИФИКАЦИИ.

Форма обучения
очная

Составители:
Руководитель направления подготовки д. ф.-м. н., профессор, зав. кафедрой теории упругости, Ватульян А.О.

Программа утверждена на заседании Ученого совета Института математики, механики и компьютерных наук им. И. И. Воровича

Протокол № _3_ от 15 марта 2016 г.

Ростов-на-Дону, 2016

ПРОГРАММА ВСТУПИТЕЛЬНОГО ЭКЗАМЕНА В АСПИРАНТУРУ ФАКУЛЬТЕТА МАТЕМАТИКИ, МЕХАНИКИ И КОМПЬЮТЕРНЫХ НАУК ЮФУ В 2016 ГОДУ ПО НАПРАВЛЕНИЮ ПОДГОТОВКИ 01.06.01 – «МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА»

Утверждена на заседании Совета факультета математики, механики и компьютерных наук, протокол N 3 от 15 марта 2016 г.

I. ПРОФИЛЬ СПЕЦИАЛЬНОСТИ «МАТЕМАТИКА»

1. ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО ПЕРЕМЕННОГО

ТЕОРИЯ МЕРЫ ЛЕБЕГА. Элементарные множества на плоскости, мера элементарных множеств, ее полуаддитивность, σ-аддитивность. Внешняя мера, измеримые множества. Мера Лебега в $\mathbf{R}^n$, определенная на σ-алгебре множеств, σ-аддитивность меры Лебега. Общее определение меры. Измеримые функции, их свойства, действия над ними. Сходимость почти всюду и по мере.

ИНТЕГРАЛ ЛЕБЕГА. Интеграл Лебега для простых функций. Интеграл Лебега на множестве конечной меры, свойства: σ-аддитивность и абсолютная непрерывность интеграла Лебега. Предельный переход под знаком интеграла Лебега (теорема Лебега).

2.ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО. Функция комплексного переменного. Дифференцируемость в точке множества Критерий дифференцируемости ф.к.п., определенной в области (в какой-либо точке этой области). Условия Коши-Римана. Геометрический смысл модуля и аргумента производной. Конформные отображения, примеры.

КОМПЛЕКСНОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ. Интеграл функции комплексного переменного и его свойства, вычисление. Интегральная теорема Коши. Теорема Коши для составных контуров. Интегральная формула Коши. Интегральная формула для составных контуров.

РЯДЫ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ. Функциональные комплексные ряды. Равномерная сходимость внутри области. Теорема Вейерштрасса. Степенные ряды, их свойства, формула Коши-Адамара. Аналитические функции, их разложение в ряд Тейлора. Теорема единственности для аналитических функций. Теорема Лиувилля. Нули аналитической функции, теоремы о нулях аналитической функции и о представлении аналитической функции в окрестности нуля. Ряд Лорана. Разложение аналитической в кольце функции в ряд Лорана, единственность разложения.

ОСОБЫЕ ТОЧКИ. ВЫЧЕТЫ. Изолированные особые точки однозначного характера, их классификация. Теоремы об устранимых точках и полюсах. Вычеты, способы вычисления. Основная теорема теории вычетов.

3.ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

МЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА. Метрические пространства: определение и примеры. Гомеоморфизм и изометрия метрических пространств. Плотные подмножества и сепарабельные пространства. Полные метрические пространства. Теорема Кантора о последовательности вложенных шаров. Оператор сжатия, принцип сжимающих отображений. Компактность в метрических пространствах, счетная компактность. Полная ограниченность, связь между компактностью и полной ограниченностью. Предкомпактность в метрических пространствах.

НОРМИРОВАННЫЕ И ГИЛЬБЕРТОВЫ ПРОСТРАНСТВА. Нормированные пространства, их подпространства и фактор-пространства. Евклидовы пространства, характеристическое свойство евклидова пространства. Гильбертовы пространства: определения и примеры.

ЛИНЕЙНЫЕ ФУНКЦИОНАЛЫ И ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ. Непрерывные линейные функционалы в нормированных пространствах. Норма функционала. Теорема Хана-Банаха в нормированнных пространствах. Линейные операторы, непрерывность и ограниченность линейных операторов. Норма ограниченного оператора. Пространство линейных непрерывных операторов. Сильная, слабая и равномерная сходимость последовательности операторов. Теорема Банаха-Штейнгауза. Продолжение линейного ограниченного оператора с плотного подпространства. Оператор, обратный к линейному, его линейность. Теорема Банаха об обратном операторе. Сопряженные операторы. Компактные (вполне непрерывные) операторы, их основные свойства. Резольвента и спектр линейного оператора. Точечное, непрерывное и остаточное множества спектра.

4. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ ОДУ. Линейные однородные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. Линейные уравнения с правой частью- квазимногочленом. Линейные системы с постоянными коэффициентами. Случай простых корней. Линейные системы с постоянными коэффициентами. Случай кратных корней.

ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ ОДУ. Основная теорема. Доказательство основной теоремы. Теорема существования и единственности для уравнений n-го порядка. Гладкость решений. Зависимость решений от параметров и начальных условий. Уравнения первого порядка, не разрешенные относительно производной.

ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ И СИСТЕМЫ. Теорема существования и единственности. Линейная зависимость и независимость функции и вектор- функции. Определитель Вронского. Формула Лиувилля. Фундаментальные системы решений. Неоднородные линейные системы с переменными коэффициентами (метод вариации произвольных постоянных). Линейные дифференциальные уравнения n-го порядка. Нули решений однородных линейных уравнений второго порядка. Функция Грина краевой задачи для ОДУ. Дельта функция и ее применение.

АВТОНОМНЫЕ СИСТЕМЫ И ТЕОРИЯ УСТОЙЧИВОСТИ. Автономные системы. Общие свойства. Производная в силу системы. Первые интегралы. Устойчивость. Функция Ляпунова. Устойчивость положения равновесия линейной системы. Устойчивость по линейному приближению. Классификация положений равновесия линейной двумерной автономной системы.

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ. Некоторые задачи приводящие к уравнениям 1-го порядка с частными производными. Задача Коши для линейных и квазилинейных уравнений с частными производными первого порядка. Основные уравнения математической физики: уравнение теплопроводности, уравнения Лапласа и Пуассона, волновое уравнение и краевые условия для них. Классификация квазилинейных уравнений в частных производных второго порядка и приведение их к каноническому виду.

ЛИТЕРАТУРА.

Основная.

1. А.Н. Колмогоров, С.В.Фомин. Элементы теории функций и функционального анализа. Наука. М. 1968,-496 с.
2. В.А. Садовничий. Теория операторов 2изд.-М. Изд. Моск. ун-та, 1986,-368 с.
3. А.И. Маркушевич. Краткий курс теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1978. 416 с.
4. Е.С.Половинкин. Курс лекций по теории функций комплексного переменного. М.: МФТИ, 1999. 256 с.

5. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. - М.: Наука, 1970.
6. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. - М.: Наука, 1974.
7. Тихонов А.Н., Васильева А.Б., Свешников А.Г. Дифференциальные уравнения. -М.: Наука, 1979.
8. Федорюк М.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения. -М.: Наука, 1980.
9. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1966.

Дополнительная

1. Л.А. Люстерник, В.И.Соболев. Краткий курс функционального анализа. М. «Высшая школа», 1982,-271 с.
2. А.А.Кирилов, А.Д. Гвишиани. Теоремы и задачи функционального анализа - М. Наука, 1979,-384 с.
3. А.Я. Хелемский. Лекции по функциональному анализу. М. Изд. МЦНМО, 2004,- 552 с.
4. Б.В.Шабат. Введение в комплексный анализ. Ч.1. М.: Наука, 1976. – 320 с.
5. Четаев Н.Г. Устойчивость движения. -М.: Наука, 1965

II. ПРОФИЛЬ СПЕЦИАЛЬНОСТИ «МЕХАНИКА»

1. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

1. Основные понятия механики (пространство, время, движение, масса, сила). Материальная точка и система материальных точек. Скорость и ускорение точки.
2. Плоскопараллельное движение твердого тела. Мгновенный центр скоростей. Ускорение, мгновенный центр ускорений. Сложное движение точки. Скорость и ускорение в сложном движении.
3. Учение о связях. Принцип возможных перемещений Уравнения равновесия механической системы в множителях Лагранжа первого и второго рода.
4. Уравнения движения точки. Общие теоремы динамики системы материальных точек в абсолютном и относительном движении (теоремы об изменении количества движения, момента количества движения и кинетической энергии). Теоремы о движении центра масс.
5. Уравнения Даламбера-Лагранжа. Уравнения Лагранжа первого и второго рода.
6. Устойчивость равновесия. Теорема Лежен Дирихле. Устойчивость движения по Ляпунову. Теорема Ляпунова об устойчивости движения.
7. Движение абсолютно твердого тела с одной неподвижной точкой. Случай Эйлера-Пуансо и его геометрическая интерпретация. Случай Лагранжа-Пуассона. Случай С.В. Ковалевской.
8. Канонические уравнения движения системы и первые интегралы. Метод Якоби. Метод Пуассона.
9. Вариационные принципы механик в дифференциальной и интегральной форме. Принципы Даламбера- Лагранжа, Гаусса-Герца, Остроградского-Гамильтона.
10. Теория удара. Удар точки о неподвижную поверхность. Общие теоремы теории удара.

2. МЕХАНИКА СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

1. Лагранжево и эйлерово описание движения сплошной среды. Градиент деформации, меры и тензоры деформации Коши-Грина и Альманзи, тензор поворота. Линейный тензор деформаций. Геометрический смысл компонент тензора малых деформаций. Уравнения совместности Сен-Венана.

2. Законы динамики в МСС (баланс количества движения и момента количества движения). Вектор напряжений. Теорема Коши о тензоре напряжений. Симметричность тензора напряжений. Главные площадки и главные напряжения.
3. Первый закон термодинамики (закон сохранения энергии). Второй закон термодинамики и неравенство Клаузиуса-Дюгема.
4. Определяющие соотношения для термоупругого материала при малых деформациях и малых изменениях температуры. Обобщенный закон Гука.
5. Модели механики жидкости. Идеальная и вязкая жидкость. Постановки задач

2.1. Механика деформируемого твердого тела

1. Дифференциальные уравнения равновесия в перемещениях. Типы краевых задач. Уравнение Бельтрами-Митчелла. Представление Папковича-Нейбера.
2. Теорема Бетти. Вариационные принципы Лагранжа и Кастильяно.
3. Решение Кельвина. Граничные интегральные уравнения в теории упругости.
4. Задача Буссинеска о действии сосредоточенной силы на полупространство. Задача Герца.
5. Задача Сен-Венана. Функция напряжений в задаче кручения. Кручение прямоугольника.
6. Плоская задача теории упругости (плоская деформация и плоское напряженное состояние).•Бигармонические функции Эри. Формулы Колосова-Мусхелишвили.
7. Растяжение плоскости с круговым отверстием. Концентрация напряжений•
8. Растяжение плоскости с трещиной. Коэффициенты интенсивности напряжений.
9. Упругие и пластические деформации. Поверхность нагружения. Условия текучести Треска-Сен-Венана и Мизеса. Определяющие соотношения деформационной теории пластичности.
10. Дифференциальные уравнения движения, граничные и начальные условия. Продольные и поперечные волны.
11. Колебания шара, явление резонанса.
12. Колебания полуограниченных тел. Принципы отбора единственного решения (принцип Зоммерфельда, принцип предельного поглощения). Антиплоские колебания слоя.
13. Волны Релея.

2.2. Механика жидкости, газа и плазмы

1. Кинематические характеристики движущейся жидкости. Теорема Коши–Гельмгольца о распределении скоростей в частице, тензор скоростей деформаций. Вихревые и безвихревые течения.
2. Основные уравнения гидромеханики в интегральной и дифференциальной формах.
3. Движение идеальной жидкости.
4. Интеграл Бернулли. Интеграл Лагранжа-Коши.
5. Теорема Лагранжа о сохранении безвихревых движений. Теоремы Гельмгольца о сохранении вихрей.
6. Безвихревые течения. Уравнение для потенциала скорости в несжимаемой жидкости и газе.
7. Одномерные течения жидкости. Исследование установившегося течения газа в трубе переменного сечения.
8. Плоскопараллельные безвихревые течения идеальной несжимаемой жидкости.
9. Комплексный потенциал. Источник (сток), диполь, вихрь, их комплексные потенциалы. Метод источников.
10. Задача обтекания цилиндра. Метод конформных отображений. Обтекание эллипса. Пространственные безвихревые течения идеальной несжимаемой жидкости. Пространственные источник, сток, диполь. Потенциал обтекания неподвижного шара. Парадокс Даламбера-Эйлера.
11. Уравнение Гельмгольца для вихрей.

12. Течение вязкой жидкости, безразмерная форма уравнений Навье–Стокса. Одномерные установившиеся течения вязкой жидкости в трубах. Движение жидкости между вращающимися соосными круговыми цилиндрами.
13. Одномерные безнапорные течения в трубах, движение вязкой жидкости между соосными цилиндрами.

Литература

1. Бухгольц Н.Н. Основной курс теоретической механики. Т. 1, 2. – М.: Наука. 1977 г.
2. Лурье А.И. Аналитическая механика. – М.: Физматгиз. 1961 г.
3. Седов Л.И. Механика сплошной среды. Т. 1, 2. –М.: Наука. 1976 г.
4. Д. Мейз. Теория и задачи механики сплошной среды. – М.: Мир. 1974 г.
5. В.Новацкий . Теория упругости. М.: Мир. 1975г..
6. Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика. Ч. 1, II. – М.: Физматгиз. 1963 г.
7. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. – М.: Наука. 1987 г.

Экзамен проходит в форме ответа на вопросы в билетах. Билеты формируются в соответствии с программами, представленными выше.